www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1990 EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Régime Général Durée : 4 heures Coefficient : 5

(I)

Dans une boite il y a 9 boules : quatre boules noires et cinq boules blanches.
On effectue un tirage d'une boule au hasard puis sans remettre la boule tirée on fait un second tirage d'une boule.

On note:
X la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le premier tirage est noir et la valeur 1 si le premier tirage est blanc
Y la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le second tirage est noir et la valeur 1 si le second tirage est blanc.

1° Quelle est la loi de X?

2° Calculer pour $(i,j) \in \{0,1\}\times\{0,1\}$ la probabilité $p_{i,j}$ de (X=i et Y=j). Dresser le tableau à double entrée donnant la loi conjointe du couple (X,Y) et les lois marginales de X et Y.

3° Donner la loi de la variable aléatoire Z égale au produit XY et la valeur de E(Z) son espérance.

4° Calculer la covariance du couple (X,Y). En déduire V(X+Y) la variance de la variable aléatoire X+Y et r_{XY} le coefficient de corrélation du couple (X,Y).

(II)

Question 1) Soit la matrice A_4 suivante de $M_4(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{bmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

1) Calculer une réduite de Gauss de A_4.

2) En déduire

a) que E l'ensemble des valeurs de a réel positif non nul pour lesquelles A_4 n'est pas inversible est l'ensemble des solutions de l'équation $z^4 - 3z^2 + 1 = 0$ et vérifier que quelque soit a élément de E la valeur absolue de a est inférieure à 2.

b) les valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Question 2) a est dans cette question un réel supérieur ou égal à deux.

.../...

1)Etudier rapidement les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $x \longmapsto a - 1/x$ .En déduire que la restriction de f à l'intervalle $I = [1, +\infty[$ réalise une bijection de I sur J un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.

2)Soit la suite (p_k) donnée par

$$p_0 = a \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad p_{k+1} = a - 1/p_k$$

Montrer qu'elle est monotone convergente de limite L à préciser. Que peut-on dire de la suite si a est inférieur ou égal à moins deux?

Question 3) Soit la matrice A_n suivante de $M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} a & -1 & & & & \\ -1 & a & -1 & & & \\ & -1 & a & -1 & & \\ & & -1 & a & -1 & \\ & & & -1 & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & a \end{bmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

1)On utilise la méthode du pivot de Gauss sans permutation de lignes pour calculer une réduite de cette matrice et l'on considère la suite des éléments diagonaux p_k successivement obtenus ($k \in \{0,1,.,...,n-1\}$
On a $p_0 = a$. Caculer p_1 et montrer que si p_k est non nul on a $p_{k+1} = a - 1/p_k$

2)Déduire de la question Q_2 que si la valeur absolue de a est supérieure ou égale à deux la matrice A_n est inversible et admet une réduite de Gauss à pivots de valeur absolue supérieure à un.

(III)

Question 1) :Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par :

$$g(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \quad \text{si } t \neq 1 \text{ , et } \quad g(1) = \frac{1}{2}$$

1)Calculer la limite de g(t) quand t tend vers 1.
2)Montrer que g admet des primitives sur $\mathbb{R}^*_+$.Soit G la primitive de g sur $\mathbb{R}^*_+$, nulle pour t=1; donner le développement limité de G à l'ordre 1 au voisinage de t = 1 .

Question 2) :
1)Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}^*_+ - \{1\}$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$

Calculer H(x) et montrer que H(x) admet une limite quand x tend vers 1.

.../...

2)Soit la fonction K définie sur $\mathbb{R}^*_+ - \{1\}$ par

$$K(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} .$$

Exprimer K(x) à l'aide de $G(x^2)$, G(x) et H(x). En déduire la limite de K(x) quand x tend vers 1.

Question 3): Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \quad \text{si } x \neq 1 \text{ , et } F(1) = \ln(2) .$$

1)La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}^*_+$?

2)Calculer F'(x) la dérivée de F(x) sur $\mathbb{R}^*_+ - \{1\}$ et sa limite quand x tend vers 1.Que peut-on en déduire?

3)Démontrer l'encadrement suivant:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*_+ - \{1\} \qquad \frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$$

4)Montrer que la fonction F admet en x = 0 un prolongement par continuité et que son prolongement $\hat{F}$ est dérivable en x = 0.

Etudier les variations de $\hat{F}$. Préciser la nature de la branche infinie de (C) la courbe représentative de F dans un repère orthogonal (O,i,j).

5)Calculer $\lim_{x \to 1} \frac{F'(x) - 1}{x - 1}$ En déduire que F'est dérivable en x = 1.Ecrire le développement limité de F au voisinage de x = 1 à l'ordre 2. Préciser la position de la courbe C par rapport à sa tangente au point d'abscisse x = 1.

6)Calculer par la méthode des rectangles une valeur approchée de F(2) en utilisant un équipartage de [2,4] de pas 0,2.

7)Tracer la courbe C et sa tangente au point d'abscisse x = 1.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail